

DIFFERENSIAL TENGLAMA YORDAMIDA O'ZBEKISTONDA AHOLI SONINING  
O'SISHINI MODELLASHTIRISH

Ismoilov M.X

*Far.DU "Matematik analiz va differensial tenglamalar" kafedrası o'qituvchisi*

Aminova F.D

*Far.DU 2-kurs magistri*

Maqolada aholi sonini o'sishini hisoblashning differensial tenglamasi keltirilib, bu formula yordamida O'zbekiston aholisining o'sish dinamikasi tahlili modellashtirilgan.

O'zbekistonda aholi sonining o'sishini differensial tenglamalar yordamida modellashtirish uchun aholi sonini o'sishini aholi soniga to'g'ridan-to'g'ri proporsionalligini tavsiflovchi o'zgaruvchisi ajraladigan Maltus tenglamasidan foydalanishimiz mumkin. Aholi sonini  $A(t)$  deb belgilaymiz, bu yerda  $t$  vaqt. Tenglamani quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

bu yerda  $k$  - mutanosiblik koeffitsienti.

Shunday qilib, o'zgaruvchilari ajraladigan oddiy differensial tenglamadan foydalanib, O'zbekiston aholisining o'sishini modellashtirish, aholi sonini o'sishi va vaqt o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlash mumkin.

Faraz qilaylik, aholi sonining o'sish tezligi aholi soniga to'g'ri proporsional bo'lsin. Agar ma'lum bir vaqt ichida aholi soni  $A$  ga teng bo'lgan va bir yildan keyin u  $a$  % foizga ko'paygan bo'lsa, aholi soni  $A$  va  $t$  vaqt orasidagi bog'lanishni toping. Bu bog'lanishni biz konkret quyidagi faktlarda keltirib o'tamiz. Ya'ni:

A) 2001-yil 1-yanvarda O'zbekiston aholisining soni 24 813 100 kishiga teng bo'lib, 2000-yil aholining yillik o'sish ko'rsatkichi 1,3288 % ga teng bo'lgan bo'lsa, 2020- yil 1-yanvar holatiga bu ko'rsatkich qanchaga borib yetdi? 2050- yilga borib O'zbekiston aholisi qancha bo'ladi?

B) Toshkent shahrida 2001-yil 1-yanvar holatiga odam soni 2 137 900 kishiga teng bo'lgan bo'lsa, 2000-yil aholining yillik o'sish ko'rsatkichi --0,2054% ga teng bo'lib, 2020- yil 1-yanvar holatiga bu ko'rsatkich qanchaga borib yetdi? 2050- yilga borib Toshkent shahri aholisi qancha bo'ladi?

**Yechish:** Aholi sonining o'sish tezligi aholi sonining vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilasiga teng bo'ladi, ya'ni  $\frac{dA}{dt}$ . Masalaning shartidan kelib chiqib, quyidagi differensial tenglamani tuzamiz

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad (1)$$

O'zgaruvchilarni ajratib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{dA}{A} = kdt \quad (2)$$

va uni integrallab qo'yilgan masalaning umumiy yechimini quyidagi ko'rinishda topamiz

$$\ln A = \ln e^{kt+c_1} \quad (3)$$

Potensirlash natijasida

$$A = e^{kt} \cdot e^{c_1} = Ce^{kt} \quad (4)$$

ga ega bo'lamiz.

Aholining bir yildan keyingi soni quyidagi ko'rinishda aniqlanadi: aholi soni  $A_0$

ning  $a\%$  ga o'sishi  $\frac{aA_0}{100}$  miqdorga, aholining bir yildan keyingi soni esa

$$A_0 + \frac{aA_0}{100} = \frac{(100+a)A_0}{100} \quad (5)$$

miqdorga teng bo'ladi.

Topilgan ifodalarni ya'ni aholi soni  $A = A_0$  va vaqt birligi  $t = 0$  larni

(4) tenglamaga qo'yib, o'zgarmas  $C$  ning qiymatini topamiz. Ya'ni

$$A_0 = C \cdot e^{k \cdot 0} = Ce^0 = C \quad (6)$$

Shunday qilib, (4) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$A = A_0 e^{kt} \quad (7)$$

$e^k$  ifodaning qiymatini hisoblash uchun qo'shimcha ma'lumotlardan foydalanamiz, ya'ni aholi sonining bir yildan keyingi miqdorini (7) formulaga

$t = 1$ ,  $A = \frac{(100+a)A_0}{100}$  qo'yish orqali  $\frac{(100+a)A_0}{100} = A_0 e^{k \cdot 1} = A_0 e^k$  va undan

$$e^k = \frac{100+a}{100} \quad (8)$$

hosil qilamiz. Topilgan (8) ifodani (7) tenglamaga qo'yib, berilgan masala shartiga mos keluvchi aholi soni va vaqt orasidagi bo'g'lanishni ifodalovchi hususiy yechimga ega bo'lamiz:

$$A = A_0 \left( \frac{100+a}{100} \right)^t \quad (9)$$

Bu formula aholi soni o'sishining asrlar, yarim asrlar mobaynidagi o'sish ko'rsatkichini aniqlashda ko'proq ishlatiladi. Chunki yillar ko'proq davom etgan sari formulaning hayotiylik darajasi ortib boradi.

**Eslatma:** Aholining o'sish ko'rsatkichi bo'lgan  $a\%$  miqdorni olishda biz bir yillik miqdorning o'sishini olishimiz mumkin, lekin bu ko'rsatkichni olishda bir necha yillarni o'sish ko'rsatkichlarining o'rta arifmetigi olinsa ya'ni

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

(9)-formulaning haqiqatga yaqinligi yanada ortiqcha bo'ladi.

Endi yuqorida qo'yilgan A), B) masalalarga to'xtalib o'tamiz.

A) Masala shartiga ko'ra 2001-yil 1-yanvarda O'zbekiston aholisining soni 24 813 100 kishiga teng bo'lgan bo'lib, aholining yillik o'sish ko'rsatkichi 1,3288 % ga teng bo'lsa, 2020- yil 1-yanvar holatiga ya'ni 20 yil ichida aholi soni qanchaga borib yetganligini (9) formula yordamida hisoblab topamiz:

Buning uchun avval  $a$  % ko'rsatkichining qanday aniqlanishiga to'xtalib o'tamiz: 2000- yili O'zbekiston aholisining soni 24.487.700 kishi bo'lgan, 2001-yilga kelib bu ko'rsatkich 24.813.100 kishiga yetgan. Demak,

$$a \% = \frac{24813100 \cdot 100}{24487700} - 100 \approx 101,3288 - 100 \approx 1,3288\%$$

Xuddi shunday 2000-2016 yillardagi 16 yillik o'sish ko'rsatkichlari foizini quyida keltirilgan 2-jadvaldan olib, ularning o'rta arifmetigini (10) formuladan foydalanib hisoblab topsak,  $a_{16} = 1,6035\%$  ga teng bo'ladi. Bu ko'rsatkich bo'yicha 2020-yil aholisini topsak,

$$A_{2020} = 24487700 \left( \frac{100 + 1,6035}{100} \right)^{20} = 24.487.700 \left( \frac{101,6035}{100} \right)^{20} \approx 33.660.562$$

kishiga teng bo'lar ekan. Bu ko'rsatkichni topishda  $A_0$  sifatida 2000-yildagi aholi soni olindi, shuning uchun  $t = 20$  deb hisoblandi va natijaga ega bo'ldik, lekin 2020-yili O'zbekiston aholisining xaqiqiy soni 33.905.200 kishiga teng bo'lgan va formuladagi hisobdan 244.638 kishiga farq qilmoqda. Bu farq umumiy aholi sonining 0,72 % miqdorini tashkil etmoqda. Bundan hulosa qilib shuni aytishimiz mumkinki, yuqorida keltirilgan usulni har qanday yillarda aholi sonining o'sishi va kamayishi ko'rsatkichlarini hisoblash vositasi sifatida ishlatishimiz mumkin bo'lar ekan.

Yuqoridagi ma'lumotlarga tayanib, 2050-yildagi O'zbekiston aholisining soni

$$A_{2050} = 24487700 \left( \frac{100 + 1,6035}{100} \right)^{50} = 24.487.700 \left( \frac{101,6035}{100} \right)^{50} \approx 54.247.712$$

Olib borilayotgan ilmiy tekshirishlar shuni ko'rsatadiki aholi sonining o'sishi manfiy darajada bo'lib qolishi ham mumkin, ya'ni aholi soni o'sish o'rniga kamayib borishi ham mumkin bo'ladi. Bunga yorqin misol sifatida Toshkent shahrida 2000-yil aholining yillik o'sish ko'rsatkichi -0,2054% ga teng bo'lgan. Endi quyidagi masalani ko'rib chiqib fikrlarimizga yakun yasaymiz:

**Qo'yilayotgan masala:** Toshkent shahrida 2001-yil 1-yanvar holatiga odam soni 2 137 900 kishiga teng bo'lgan bo'lsa, 2000-yilda bu ko'rsatkich 2 142 300 kishiga teng bo'lib aholining yillik o'sish ko'rsatkichi -0,2054% bo'lgan, 2020- yil 1-yanvar holatiga bu ko'rsatkich qanchaga borib yetdi?

**Yechish:**

Xuddi yuqorida bajarilgan ishlar singari 2000-2016 yillardagi 16 yillik o'sish ko'rsatkichlari foizini quyida keltirilgan 3-jadvaldan olib, ularning o'rta arifmetigini

(10) formuladan foydalanib hisoblab topsak,  $a_{16} = 0,73244375\%$  ga teng bo'ladi. Bu ko'rsatkich bo'yicha 2020-yil aholisini (9) formuladan foydalanib topsak

$$A_{2020} = 2.142.300 \left( \frac{100 + 0,73244375}{100} \right)^{20} = 2.142.300 \left( \frac{100,73244375}{100} \right)^{20} \approx 2.478.949$$

ga ega bo'lib bu miqdor 2020- yili Toshkent shahri aholisining xaqiqiy soni 2.571.700 kishiga teng bo'lgan va formuladagi hisobdan 92.751 kishiga farq qilmoqda. Bu farq umumiy aholi sonining 20 yil mobaynida 3,6 % miqdorini tashkil etmoqda. Bundan hulosa qilib shuni aytishimiz mumkinki, Toshkent shahrida yashovchilar uchun propiska masalalarini soddalashtirilishi natijasida so'ngi yillarda aholi sonining ortishi kuzatilib kelinmoqda. Bu esa o'z navbatida shahar aholisining o'sishini ko'proq foizlarda formuladan xatolik bilan chetlanishiga sabab bo'ladi.

Yuqoridagi ma'lumotlarga tayanib, 2050-yildagi Toshkent shahri aholisining soni

$$A_{2050} = 2.142.300 \left( \frac{100 + 0,73244375}{100} \right)^{50} = 2.142.300 \left( \frac{100,73244375}{100} \right)^{50} \approx 3.085.665$$

kishiga borib etishi mumkin ekan.

<b>Doimiy aholi soni to'g'risidagi ma'lumot</b>	
<i>Yil boshida</i>	
Ming kishi	
shkent	2000
142.3	487.7
137.9	813.1
136.6	115.8
139.2	427.9
135.4	707.4
135.7	021.3
140.6	312.7
157.1	663.8
180.0	072.2
206.3	533.4
234.3	001.4
296.5	123.4
309.3	555.4
340.9	993.5
352.9	492.8
371.3	022.5
393.2	575.3
424.1	120.5
464.9	656.7
509.9	255.5
571.7	905.2

1-jadval

O'zbekiston aholisining 16 yillik o'sish ko'rsatkishi

2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006	2006-2007	2007-2008
1,3288	1,2199	1,2426	1,0991	1,2210	1,1198	1,3343	1,5316
2008-2009	2009-2010	2010-2011	2011-2012	2012-2013	2013-2014	2014-2015	2015-2016
1,7036	1,6997	4,0069	1,4833	1,4823	1,6646	1,7371	1,7819

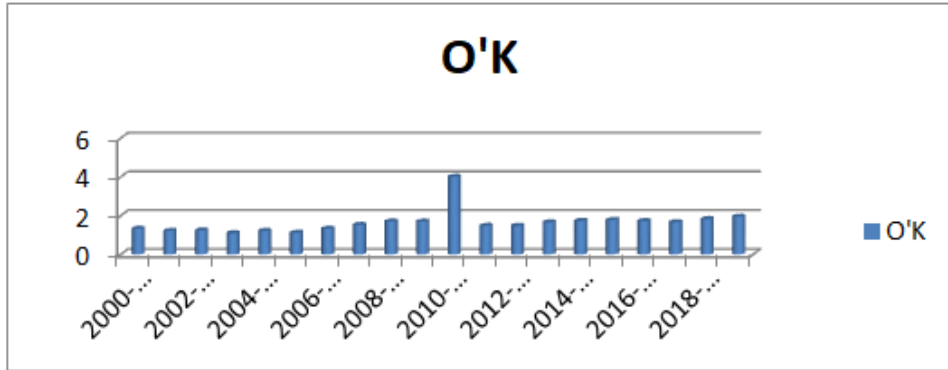
2-jadval

Toshkent shahri 16 yillik o'sish ko'rsatkichlari

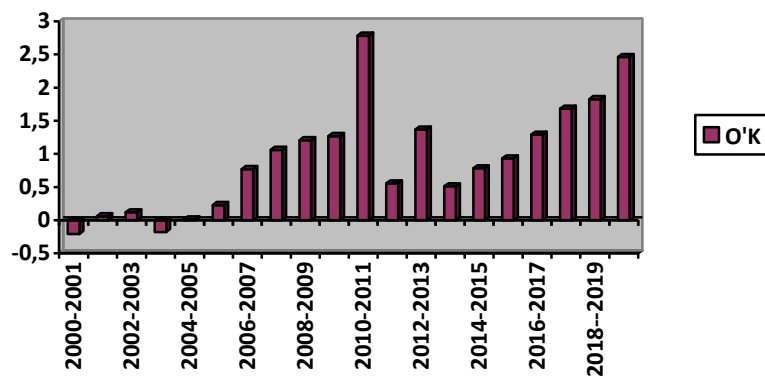
2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006	2006-2007	2007-2008

-0,2054	0,0608	0,1217	-0,1777	0,0140	0,2294	0,7708	1,0616
2008-2009	2009-2010	2010-2011	2011-2012	2012-2013	2013-2014	2014-2015	2015-2016
1,2064	1,6997	2,7839	0,5574	1,3684	0,5126	0,7820	0,9335

3-jadval



1-diagramma



2-diagramma

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YHATI:**

1. R.S. Guter, A.R.Yanpolskiy, Differensial tenglamalar, Toshkent-1978.
2. К.К.Пономарев, Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач, Москва 1962.
3. Viloyat statistika boshqarmasi ma'lumotlari.
4. To'xtasinov M., Ergashev T.G'. Differensial tenglamalar .
5. Internet saytlari