АСИМПТОТИК АНАЛИЗДА КАТТА СОНЛАР ФУНКЦИЯСИ УСУЛИ ХАҚИДА

https://doi.org/10.5281/zenodo.7883057

Салимажон Рўзимова
Ургенч Давлат университети

Математик анализнинг муҳим таркибий қисмларидан бири бу асимптотик анализ бўлиб, асимптотик анализ муайян аналитик формулалар ёки тасдиқларга асосланган қоидалар мажмуи эмас. Унинг мақсади, математик анализ элементларини ўзгарувчи миқдорларнинг асимптотик ҳолатларини ўрганишга жалб қилишдан иборат.

Ушбу ишда муайян шартлар бажарилганда

$$\varphi(x)[f(x)]^n dx \qquad (1)$$

кўринишдаги дифференциал ифодадан $[a;b]$ оралиқ бўйича олинган аниқ интегралнинг $n \to \infty$ ҳолдаги асимптотик қийматини ўрганамиз. Олинган натижа интеграллаш оралиғи чексиз бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини таъкидлаб ўтамиз. (1) кўринишдаги ифодада $f(x)$ функциянинг n-даражаси қатнашгани учун ушбу

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx \qquad (2)$$

интеграл натижасини катта сонлар функцияси деб айтамиз. Бундай кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш жараёни машҳур француз математиги Лапласнинг тадқиқотлари билан боғлиқ бўлиб, бундай кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда биз Лаплас таклиф этган усулдан фойдаланамиз; қаранг [1]. Қўйилган масала моҳиятан катта сонлар қонунига қиёсланиши мумкин. Масала ўз ечимини топгандан кейин унинг амалий масалалардаги татбиқи етарлича аҳамиятга эга эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Дастлаб қуйидаги леммани исботлайлик.

Лемма[1]. *$a < c < b$ ва $k \in \mathbb{R}_+$ ўзгармас сонлар бўлсин, у ҳолда $n \to \infty$ да ушбу*

$$\int_a^b e^{-kn(x-c)^2}dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{kn}} \qquad (3)$$

асимптотик формула ўринли.

Исбот. (3) муносабатнинг чап томонида $t = (x - c)\sqrt{kn}$ деб аламаштириш бажарайлик. У ҳолда

$$dx = \frac{1}{\sqrt{kn}}dt$$

ва қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\int_a^b e^{-kn(x-c)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{kn}} \int_{-\sqrt{kn}(c-a)}^{\sqrt{kn}(b-c)} e^{-t^2}dt. \qquad (4)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $n \to \infty$ деб лимитга ўтсак, ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{kn}(c-a)}^{\sqrt{kn}(b-c)} e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \qquad (5)$$

хосмас интегралга келамиз. Иккинчи томондан маълумки, e^{-t^2} функция $(-\infty;+\infty)$ тўпламда жуфт функция. Шунинг учун

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$$

деб ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонида $x = t^2$ деб белгилаш киритсак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

бу ерда $\Gamma(x)$ — Эйлернинг Гамма функцияси. Бизга маълум бўлган ушбу [2, 377-бет]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

формулада десак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Охирги тенгликни (4) ва (5) муносабатлар билан биргаликда қарасак,

$$\int_a^b e^{-kn(x-c)^2}dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{kn}}, \quad n \to \infty.$$

Лемма исботланди.

Теорема. *Чекли ёки чексиз* $[a;b]$ *оралиқда аниқланган* $\varphi(x)$, $h(x)$, $f(x) = e^{h(x)}$ *функциялар берилган бўлиб, уларга нисбатан қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $\varphi(x)$ *чегараланган,* $h(x)$ *узлуксиз;*

2) *бирор* $c \in (a;b)$ *нуқтада* $h(x)$ *функция максимумга эришсин;*

3) c *нуқтанинг бирор атрофида* $h''(x)$ *узлуксиз ва* $h''(c) < 0$*;*

4) $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x) = \varphi(c) \neq 0$.

У ҳолда $n \to \infty$ *да ушбу*

$$\int_a^b \varphi(c)[f(c)]^n dx \sim \varphi(c)[f(c)]^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{-\frac{2\pi}{nf''(c)}}$$

$$\sim \varphi(c)e^{nh(c)}\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(c)}} \qquad (6)$$

асимптотик формула ўринли.

Изоҳ 1. Юқорида исботланган теорема [1] адабиётда $\varphi(x)$, $h(x)$ функцияларга бошқача шартлар қўйилиш орқали масала шаклида келтирилган.

Изоҳ 3. Исботланган асимптотик формула шуни тасдиқлайдики, функциянинг катта сондаги даражаси интегралининг қиймати кўпайтувчилар сони ошиши билан функция максимумининг шу сондаги даражасига пропорционал экан. Демак, бундай типдаги интегралларнинг асимптотик ҳолатини ўрганиш масаласи функция максимумини ўрганиш масаласи билан бевосита боғлиқ.

Изоҳ 2. Хусусан, $f(0)=0$ ва $\varphi(x)=(n+1)f'(x)$ бўлган ҳолда

$$\int_0^c \varphi(x)[f(x)]^n dx = F'(c)\cdot[f(c)]^n$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt .$$

(6) формула эса юқоридаги тенгликнинг асимптотик умумлашмасидир.

Изоҳ 4. Исботланган теорема тасдиғини умумий ҳолда ҳам ҳақиқий анализдаги қатор асимптотик формулаларнинг умумлашмаси сифатида талқин этиш мумкин. Дарҳақиқат, Гамма функцияси бўлган ушбу $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$ интегралда $u = tz$, $x = n+1$ ва $z = n$ алмаштиришлардан сўнг қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1}\int_0^{\infty}\left(xe^{-x}\right)^n dx . \qquad (7)$$

Охирги (7) тенликни

$$\varphi(x)[f(x)]^n = \varphi(x)e^{nh(x)}$$

кўриниш билан таққослайлик. Бунинг учун $\varphi(x) = 1$ ва $f(x) = xe^{-x}$ дейиш кифоя. У ҳолда $h(x) = \ln\left(xe^{-x}\right)$ ва бу функциялар учун Теорема 1 нинг шартлари бажарилади. Яъни, $\varphi(x)$ чегараланган, $h(x)$ функция $(0;\infty)$ оралиқда узлуксиз ва $c = 1$ нуқтада

$$h(1) = -1 = \max_{x\in(0;\infty)} h(x), \quad h''(1) = -1 < 0$$

ҳамда, равшанки, $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)=1$. У ҳолда (6) ва (7) муносабатларга кўра қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\Gamma(n+1)\sim n^{n+1}\left(e^{-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{-\frac{2\pi}{-ne^{-1}}}\sim\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n},\qquad n\to\infty. \qquad (8)$$

Ҳосил қилинган (8) асимптотик формула бизга маълум бўлган Стирлинг формуласидир.

Агар Лемма 1 тасдиғини аниқлаштирсак (8) асимптотик формулада қолдиқ ҳаднинг баҳосини олиш имконига эга бўламиз. Дарҳақиқат, (3) муносабатни қуйидаги кўринишда аниқлаштириш мумкин:

$$\left|\int_a^b e^{-kn(x-c)^2}dx-\sqrt{\frac{\pi}{kn}}\right|=O\left(\frac{1}{n}\right),\qquad n\to\infty.$$

Охирги баҳодан фойдаланиб (8) формулани қуйидагича аниқлаштиришимиз мумкин:

$$\left(\frac{e}{n}\right)^{n}\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\qquad n\to\infty.$$

АДАБИЁТ:

1. G.Pólya und G.Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer–Verlag, Berlin, 1964.

2. Г.М.Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Наука, Москва, 1970.