QIZIQARLI SONLAR KETMA-KETLIKLARINING LIMITINI ISHLASHGA QIYNALYAPSZMI? ENDI BUNING OSON YECHIMI BOR.

Yo'lchiyev Shahriyor Xusanovich
Andijon davlat pedagogika instituti f.-m.f. d, professor
Erkinova Odinaxon Kozimjon qizi
Aniq fanlar fakulteti Matematika va informatika yònalishi 2 – bosqich talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqola o‘qituvchi va o‘quvchilarga metodik tavsiya sifatida yozilgan. Matematikaning asosiy bo‘limlaridan biri sonlar ketma-ketligining limiti haqida ma’lumot beriladi.O‘quvchi bu mavzuni o‘rganish natijasida sonlar ketma-ketligining limiti mavzusiga qiziqishi ortadi.Biz ushbu maqolada shu sonlar ketma-ketligiga doir ayrim formulalarni ko‘rib chiqdik va shu mavzu yuzasidan misollar ham ko‘rsatishga harakat qildik.Sonlar ketma-ketligiga oid dars jarayonida o‘qituvchi maqoladan ko‘rgazma sifatida foydalansa bo‘ladi. Maqola matematikani o‘qitish samaradorligini oshirishda xizmat qiladi.Bu maqolamiz sizlarga manzur bo‘ladi degan umiddamiz.*

Kalit so‘zlar: *Ketma-ketlik, kordinata, sonli to‘plam, limit, interval, segment, o‘suvchi, kamayuvchi, o‘zgarmas...*

Annotation: *This article is written as a methodological recommendation for teachers and students. One of the main sections of mathematics is information about the limit of the sequence of numbers.As a result of studying this topic, the reader is interested in the topic of the limit of the number sequence ortadi.Biz in this article, we examined some formulas for the sequence of these numbers and tried to show examples on this topic as well.In the course of a lesson on the sequence of numbers, the teacher can use the article as an exhibition. The article serves to improve the effectiveness of teaching mathematics.We hope that this article will appeal to you.*

Key words: *Sequence, cordinata, finite set, limit, interval, segment, ascending, decreasing, invariant...*

Аннотация: *Данная статья написана как методическая рекомендация учителю и ученикам. В одном из основных разделов математики дается информация о пределе последовательности чисел.Интерес читателя к теме предела последовательности чисел в результате изучения данной темы ortadi.Biz в этой статье мы рассмотрели некоторые формулы для этой последовательности чисел, а также постарались показать примеры по этой теме.В процессе занятия по последовательности чисел учитель может использовать артикль как наглядное пособие. Статья служит для повышения эффективности обучения математике.Надеемся, что эта статья вам понравится.*

Ключевые слова: *Последовательность, координата, числовой набор, предел, интервал, сегмент, возрастающий, убывающий, неизменяемый...*

Natural sonlar ketma- ketligi berilgan bo`lsin:

$$1,2,3,4,\ldots,k,\ldots,n,\ldots \qquad (1)$$

Bu sonlar o`sib borish tartibida joylashgan, ya`ni n soni k sonidan keyin, o`ngda joylashgan.

Agar natural sonlar qatoridagi har bir n natural sonni biror x_n haqiqiy sonlar bilan almashtirilsa, u holda, sonlar ketma- ketligi hosil bo`ladi:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

Ketma- ketlikning har bir elementi (yoki hadi) natural sonlar bilan nomerlangan va bu nomerlar o`sib borish tartibida joylashgan. (2) dagi $x_1$ - ketma- ketlikning birinchi hadi, $x_2$ - ketma- ketlikning ikkinchi hadi, $x_3$ - ketma- ketlikning uchinchi hadi, $x_k$ - ketma – ketlikning $k$ - hadi, $x_n$ esa $n$ - hadi deyiladi. Berilgan ketma – ketlikni umumiy holda $\{x_n\}$ ko`rinishda belgilash qabul qilingan.

Ketma- ketliklar qator shaklida hamda formula ko`rinishida ham beriladi. Masalan, (1) va (2) ketma – ketliklar qator shaklida berilgan.

$$x_n = 2n,\ x_n = \frac{n}{n+1},\ x_n = n^2 - n,\ x_k = \frac{k}{k^2+1}$$

kabilar formula shaklida berilgan ketma – ketliklardir. Bunday ketma – ketliklarni qator shakliga keltirish mumkin. Masalan, $x_n = 2n$ - juft sonlar ketma – ketligidir, ya`ni:

$x = 1$ bo`lsa, $x_n = 2\cdot 1 = 2$,

$x = 2$ bo`lsa, $x_n = 2\cdot 2 = 4$,

$x = 3$ bo`lsa, $x_n = 2\cdot 3 = 6$

va hokazo. Bu sonlardan quyidagi ketma – ketlik hosil bo`ladi:

$$2,4,6,\ldots x_n,\ldots$$

Xulosa qilib, sonlar ketma – ketligiga quyidagicha ta`rif berish mumkin:

Ta`rif. Barcha natural sonlar to`plamida aniqlangan $f(x)$ sonli funktsiyaga cheksiz sonli ketma-ketlik deyiladi.

Sonli ketma-ketlikning limiti

Faraz qilaylik, ketma – ketlikning umumiy hadi

$$x_n = \frac{3n-1}{n} \qquad (1)$$

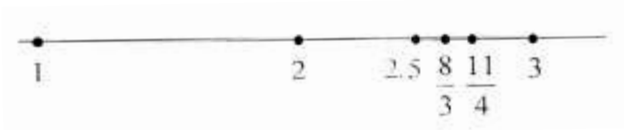
ko`rinishda berilgan bo`lsin. n ga $1,2,3,\ldots$ qiymatlar berib, (1) ning bir necha hadini topaylik. Bu hadlar

$$x_1 = 2;\ x_2 = 2{,}5;\ x_3 = \frac{8}{3};\ x_4 = \frac{11}{4};\ldots$$

lardan iborat bo`ladi. Hosil bo`lgan

$$2;\ 2{,}5;\ \frac{8}{3};\ \frac{11}{4};\ldots \qquad (2)$$

ketma- ketlikni son o`qida nuqtalar bilan quyidagicha belgilash mumkin:



Hosil bo`lgan ketma –ketlikdan va chizmadan shu narsa ma`lum bo`ladiki, berilgan sonli ketma –ketlikning umumiy hadi $x_n$ $n$ ning ortishi bilan 3 soniga yaqinlashadi va $3-x_n$ ayirma o`zining absolyut qiymati bo`yicha nolga yaqinlashib qoladi. Masalan,

$$3-x_1=3-2=1,$$

$$3-x_2=3-2{,}5=\frac{1}{2},$$

$$3-x_3=3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}, \qquad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3-x_n=3-\frac{3n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Bunda $n=100$ bo`lsa, ayirma 0,01 ga; $n=1000$ bo`lsa 0,001ga; $n=10000$ bo`lsa, 0,0001 ga teng bo`ladi hamda n ortgan sari $3-x_n$ ayirma nolga intila boradi. Ayirma istalgancha kichik musbat sondan kichik bo`lib qolsa, u holda, 3 soni berilgan ketma –ketlikning limiti deyiladi. Buni quyidagicha ta`riflash mumkin.

Ta`rif. Har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $N$ son topilsaki, $n>N$ bo`lganda $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti deyiladi yoki $\{x_n\}$ ketma –ketlik a ga yaqinlashadi deyiladi hamda quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a. \qquad (4)$$

Limitga ega bo`lgan sonli ketma –ketlik yaqinlashuvchi, limitga ega bo`lmagan ketma –ketlik esa uzoqlashuvchi ketma - ketlik deyiladi.

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar

Ta`rif. Limiti nolga teng bo`lgan x_n o`zgaruvchiga cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Agarda , o`zgaruvchining limiti ta`rifdan $a=0$ deb faraz qilinsa, u holda, $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik quyidagi ko`rinishga keladi:

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon.$$

U holda cheksiz kichik miqdorning yuqoridagi ta`rifini limit ishlatmasdan quyidagicha keltirish mumkin:

Ta`rif: Agar $x_n$ o`zgaruvchi yetarlicha katta biror nomerdan boshlab, absolyut qiymati bo`yicha oldindan berilgan har qancha kichik $\varepsilon > 0$ sondan ham kichik bo`lsa va shundayligicha qolsa, x_n o`zgaruvchiga cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Cheksiz kichik miqdor o`zgaruvchi miqdor bo`lib, o`zining o`zgarishi jarayonidagina ixtiyoriy olingan ε sondan kichik bo`lish qobiliyatiga ega bo`ladi.

Agar limiti a ga teng bo`lgan $x_n$ o`zgaruvchining umumiy holiga qaytsak, o`zgaruvchi bilan uning limiti orasidagi ayirma $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor bo`ladi, chunki $|x_n - a| < \varepsilon$ ga asosan

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \qquad (n > N)$$

va aksincha, agar α_n cheksiz kichik bo`lsa, u holda $x_n \to a$ bo`ladi.

Monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti

1-ta`rif: Agar ikkita $a$ va $b$ sonlar mavjud bo`lib, barcha n lar uchun

$$a = a_n \leq b \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ ga chegaralangan ketma –ketlik deyiladi.

2-ta`rif. Agar $M > 0$ son mavjud bo`lib, istalgan $n \in N$ lar uchun $a_n > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ ketma –ketlik quyidan chegaralangan ketma –ketlik deyiladi.

3-ta`rif. Agar $M$ son mavjud bo`lib, barcha $n \in N$ lar uchun $a_n < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ ketma –ketlik yuqoridan chegaralangan ketma –ketlik deyiladi.

4-ta`rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $a_n < a_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ga monoton o`suvchi ketma –ketlik deyiladi.

5-ta`rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $a_n > a_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ ga monoton kamayuvchi ketma –ketlik deyiladi.

Har qanday $n \in N$ uchun $a_n \geq a_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ga o`smaydigan ketma –ketlik ; $a_n \leq a_{n+1}$ bajarilsa, $\{a_n\}$ ga kamaymaydigan ketma –ketlik deb ataladi.

Monoton chegaralangan ketma –ketlik limitining mavjudligi haqida quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar ketma –ketlik monoton o`suvchi va yuqoridan chegaralangan bo`lsa, u ketma –ketlik limitga ega bo`ladi.

2-teorema. Agar ketma –ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo`lsa, u ketma –ketlik limitga ega bo`ladi.

Veyershtras teoremasi. Agar ketma –ketlik monoton va chegaralangan bo`lsa, u limitga ega bo`ladi.

1-misol. Umumiy hadi $(2n+1)$dan iborat bo`lgan ketma –ketlik berilgan bo`lsin. U holda, uni quyidagicha yozish mumkin:

$1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$.

Bundan ko`rinib turibdiki, ketma –ketlik chapdan 1 raqami bilan chegaralangan. O`ng tomondan esa chegaralanmagandir. Demak, berilgan ketma –ketlik o`suvchi bo`lib, quyidan chegaralangan.

2-misol. $-1; -3; -5; \ldots; (1-2n); \ldots$ ketma – ketlik kamayuvchi bo`lib, yuqoridan chegaralangan.

Funktsiyaning limiti

Ta`rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A soni $x \to a$ da $f(x)$ funktsiyaning limiti deyiladi va bunday belgilanadi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Agar har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x-a| < \delta$ bajarilganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ ham bajarilsa, x argument a ga intilganda funktsiya A songa teng limitga ega deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Berilgan $f(x)$ funktsiyaning limiti qaralayotgan a nuqta funktsiyaning aniqlanish sohasiga kirishi yoki kirmasligi ham mumkin. Funktsiyaning a nuqtadagi limiti topilganda $x \neq a$ deb qaraladi. Funktsiyaning limiti δ, ε va a larga bog`liq bo`ladi. Bunda quyidagi uch holni qarab o`tamiz:

1. $a = \infty$ va A - chekli.
2. a - chekli va $A \to \infty$.
3. $a = \infty$ va $A = \infty$.

Endi bu hollar uchun funktsiya limitiga ta`riflar beramiz.

1.Oldindan berilgan har qanday cheksiz kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday Δ son topilsaki, $|x| > \Delta$ bo`lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo`lsin:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

2.Oldindan berilgan har qanday istalgancha katta $E > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $|x-a| < \delta$ bo`lganda $|f(x)| > E$ bo`lsin:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

3.Oldindan berilgan har qanday istalgancha katta $E>0$ son uchun shunday $\Delta>0$ son topilsaki, $|x|>\Delta$ bo`lganda $|f(x)|>E$ kelib chiqsin:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty .$$

Funktsiya limiti ta`rifidan foydalanib, quyida funktsiyalar limitlarini topamiz.

1-misol. O`zgarmas sonning limiti shu sonning o`ziga tengligini isbotlang.

Isboti: Faraz qilaylik, $f(x)=c$ berilgan bo`lsin. U holda, har qanday $\varepsilon>0$ son uchun $|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$ tengsizlik hosil bo`ladi. Xulosa qilib aytish mumkinki, ixtiyoriy a uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} c=c$.

2-misol. $f(x)=x$ berilgan bo`lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$ ekanligini isbotlang.

Isboti: Faraz qilaylik, $\varepsilon>0$ ixtiyoriy haqiqiy son bo`lsin. Quyidagi modulni yozamiz: $|f(x)-a|=|x-a|$.

Agar $\delta=\varepsilon$ deb olsak, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday x uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi, ya`ni $|x-a|<\varepsilon$ va funktsiyaning nuqtadagi limitining ta`rifiga asosan quyidagi natijaga kelamiz:

$$\lim_{x\to a} x=a .$$

3-misol. Funktsiya limitining ta`rifidan foydalanib, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$ ni isbot qiling.

Isboti: Funktsiya limitining ta`rifiga asosan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun biror $\delta>0$ son topilib, $|x-1|<\delta$ bo`lganda $|f(x)-(-2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kerak, ya`ni:

$$|2x-4-(-2)|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon .$$

Ushbu tengsizlik δ ni qanday tanlaganda bajarilishini topamiz. Oxirgi tengsizlikdan ko`rinadiki, $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$ bajarilsa, $|f(x)+2|<\varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$.

ADABIYOTLAR:

1. Alimov Sh. A. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari, o`rta maktabning 10-11 sinflari uchun darslik. Toshkent, “O`qituvchi”, 1996- yil va keyingi nashrlari.
2. Kolmogorov A. N. tahriri ostida. Algebra va analiz asoslari. 10-11 sinflar uchun darslik. Toshkent, “O`qituvchi”, 1992-yil.

3. Vafoyev R. H. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o`quv qo`llanma. Toshkent, “O`qituvchi”, 2001-yil.

4. Abduhamidov A. U. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun sinov darsligi. Toshkent, “O`qituvchi”, 2001 yil.

5. Antonov K. P. va boshqalar. Elementar matematika masalalari to`plami. Toshkent, “O`qituvchi”, 1975-yil va keyingi nashrlari.

6. Skanavi M. N. tahriri ostida. Matematikadan masalalar to`plami. Toshkent, “O`qituvchi”, 1983-yil va keyingi nashrlari.