LAGRANJ FUNKSIYASI YORDAMIDA OLIMPIADA TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH

Erkaboyeva Zavra
Samarqand viloyati
Qo`shrabot tumani 34-IDUM matematika fani o`qituvchisi

Annotatsiya: *Xalqaro Matematika Olimpiadalarida tengsizliklarni isbotlash alohida o`rin tutadi. Bu kabi tengsizliklarni isbotlashning turli usullari mavjud bo`lib, ushbu maqolada ishlatilishi sodda va qulay hisoblangan Lagranj funksiyasi yordamida tengsizliklarni isbotlash usuli keltirilgan.*

Kalit so`zlar: *Lagranj funksiyasi, shartli ekstremum, ekstremumning yetarlilik shartlari, xususiy hosilalar, tenglamalar sistemasi.*

Ma'lumki, bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlarini topish masalasi amaliyotda dolzarb hisoblanadi. Shuningdek, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ma'lum bir shartlar asosida topilgan ekstremumi optimallashtirish masalalarini yechishda, amaliyotda foydalanishda o'z ahamiyatiga egadir. Xususan, ushbu turdagi funksiyalarning shartli ekstremumlarini topishni matematik olimpiada masalalarida uchraydigan tengizliklarni isbotlashda ham qo`llash mumkin. Quyida shartli ekstremum, Lagranj funksiyasi haqida tushuncha, shuningdek, ushbu funksiya yordamida Xalqaro Matematik Olimpiada tengsizliklarini isbotlash usuli keltirilgan.

Ta'rif. Faraz qilaylik, n o'zgaruvchili $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar a nuqtaning shunday atrofi topilsaki, bu atrofdan olingan istalgan x nuqta uchun $f(a) \geq f(x)$ $\left(f(a) \leq f(x)\right)$ tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtada *lokal maksimum (lokal minimum) ga* ega deyiladi.

Endilikda biz berilgan funksiyaning ekstrimal qiymatlarini biror qo'shimcha shartlar bajarilganda topish masalasini o'rganamiz. Bunda asosan qo'shimcha shartlar o'zgaruvchilarning qiymatlarini cheklash shaklida beriladi.

Masalan uch o'zgaruvchili $f(x, y, z)$ funksiya maksimal qiymatining argumentlari

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

qo'shimcha shartni qanoatlantirganda topish masalasini olaylik. Bunda $\varphi(x, y, z)$ uch o'zgaruvchili funksiya yetarli marta differensiallanuvchi funksiyadir. Bunda maksimum qiymat *shartli maksimum,* minimum qiymat *shartli minimum* deyiladi. Shartli maksimum va shartli minimum birgalikda *shartli ekstremum* deb ataladi.

Shartli ekstremumlarni topish uchun asosan *Lagranj ko'paytuvchilar* usulidan foydalaniladi. Ya'ni shunday $\exists\lambda$ son tanlab olinib, quyidagi Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z)$$

So'ngra, Lagranj funksiyasining barcha xususiy hosilalarini nolga tenglashtirishdan hosil bo'lgan quyidagi tenglamalar sistemasi yechiladi va undan λ son topiladi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Topilgan λ sonni yuqoridagi tenglamalar sistemasiga qo'yib, o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish topiladi, topilgan munosabatlarni $\varphi(x,y,z) = 0$ shartga qo'yib, $f(x,y,z)$ funksiyani shartli ekstremumga erishtiradigan $(x.y.z)$ nuqta topiladi. Topilgan nuqtaning shartli maksimum yoki shartli minimum ekanligini aniqlash uchun ekstremumning yetarli shartlaridan foydalaniladi.

Quyida ushbu usul yordamida isbotlash mumkin bo`lgan tengsizliklar keltirilgan.

1-misol[Korea-1998]. Agar x, y, z musbat sonlar bo'lib, $x + y + z = xyz$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}.$$

Isbot.

Dastlab, quyidagi funksiyani qaraymiz: $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Masala shartiga ko`ra, ushbu funksiyaning argumentlari $\varphi(x,y,z) = xyz - x - y - z = 0$ shartni qanoatlantirganda, $f(x,y,z)$ funksiyaning shartli maksimum qiymatini topishimiz kerak.

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} - \lambda(xyz - x - y - z). \end{aligned}$$

bu yerda $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

Tuzilgan Lagranj funksiyasining xususiy hosilalaridan foydalanib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} - \lambda(yz-1) = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}} - \lambda(xz-1) = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z} = -\dfrac{z}{\sqrt{(1+z^2)^3}} - \lambda(xy-1) = 0 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasidan quyidagilarni topish mumkin: $x = y = z = \sqrt{3}, \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{16}$.

Topilgan $A(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$ nuqtani ekstremumning ikkinchi yetarlilik shartiga tekshiramiz. Buning uchun Lagranj funksiyasining ikkinchi tartibli differensialini topamiz:

$$d^2L = \frac{1-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}dx^2 + \frac{1-2y^2}{\sqrt{(1+y^2)^5}}dy^2 + \frac{1-2z^2}{\sqrt{(1+z^2)^5}}dz^2 + 2\lambda z dxdy + 2\lambda y dxdz + 2\lambda x dydz$$

Shartga ko`ra, $\varphi(x,y,z) = xyz - x - y - z = 0$. $\varphi(x,y,z)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini topamiz:

$$d^2\varphi(x,y,z) = 2(xdydz + ydxdz + zdxdy) = 0,$$

Demak,

$$d^2L = \frac{1-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}dx^2 + \frac{1-2y^2}{\sqrt{(1+y^2)^5}}dy^2 + \frac{1-2z^2}{\sqrt{(1+z^2)^5}}dz^2.$$

So`nggi tenglikka $A(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$ ni qo`ysak,

$$d^2L|_A = -\frac{5}{32}dx^2 - \frac{5}{32}dy^2 - \frac{5}{32}dz^2 < 0,$$

munosabatga kelamiz. Demak, $f(x,y,z)$ funksiya $A(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$ nuqtada shartli maksimumga erishadi. Bundan esa

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}.$$

tengsizlik kelib chiqadi.

2-misol[United Kingdom-1999]. Manfiy bo'lmagan x, y, z sonlari uchun $x+y+z=1$ tenglik o`rinli bo`lsa, ushbu tengsizlikni isbotlang:

$$7(xy + yz + xz) \le 2 + 9xyz.$$

Isbot.

Quyidagi funksiyani qaraymiz: $f(x,y,z) = 7(xy+yz+xz) - 9xyz.$

Shartga ko`ra, ushbu funksiyaning argumentlari $\varphi(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$ shartni qanoatlantirganda, $f(x,y,z)$ funksiyaning shartli maksimumini topish kerak.

Buning uchun dastlab Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z)$$
$$= 7(xy+yz+xz) - 9xyz - \lambda(x+y+z-1).$$

Tuzilgan Lagranj funksiyasining xususiy hosilalaridan foydalanib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x} = 7(y+z) - 9yz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y} = 7(x+z) - 9xz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z} = 7(x+y) - 9xy - \lambda = 0 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasidan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$x = y = z = \frac{1}{3}, \lambda = \frac{11}{3}.$$

Topilgan $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nuqtani ekstremumning ikkinchi yetarli shartiga ko`ra shartli ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun $L(x, y, z, \lambda)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialining topilgan nuqtadagi ko`rinishini topamiz:

$$d^2L|_A = [2(7-9z)dxdy + 2(7-9y)dxdz + 2(7-9x)dydz]|_A$$
$$= 8(dxdy + dxdz + dydz).$$

Berilgan shartga ko'ra, $\varphi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$. Ushbu funksiya kvadratining ikkinchi tartibli differensialini hisoblaymiz:

$$\varphi^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0,$$
$$d^2\varphi^2(x, y, z) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 4dxdy + 4dxdz + 4dydz = 0.$$

Bundan esa quyidagi tenglikni topamiz:

$$dxdy + dxdz + dydz = -\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Demak,

$$d^2L = 8(dxdy + dydz + dxdz) = -4(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0.$$

Ya`ni $f(x, y, z)$ funksiya $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nuqtada shartli maksimumga erishadi. Bundan esa

$$7(xy + yz + xz) \leq 2 + 9xyz$$

tengsizlik kelib chiqadi.

3-misol[Vengriya – 1996]. Musbat x, y sonlarining yig'indisi 1 ga teng bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} \geq \frac{1}{3}.$$

Isbot.

Quyidagi funksiyani qaraymiz: $f(x, y) = \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1}$.

Shartga ko'ra ushbu funksiyaning argumentlari $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ shartni qanoatlantirganda $f(x, y)$ funksiyani shartli minimum qiymatini topish kerak. Buning uchun dastlab Lagranj funksiyasini tuzib olamiz:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} - \lambda(x + y - 1).$$

Lagranj funksiyasining xususiy hosilalarini nolga tenglab quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 1 - \dfrac{1}{(1+y)^2} - \lambda = 0 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib quyidagi tengliklarni topamiz:

$$x = y = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{5}{9}$$

Topilgan $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtani ekstremumning ikkinchi yetarli shartiga ko`ra shartli ekstremumga tekshiramiz:

$$d^2L = \frac{2}{(1+x)^3}dx^2 + \frac{2}{(1+y)^3}dy^2 \Rightarrow d^2L|_A = \frac{16}{27}dx^2 + \frac{16}{27}dy^2 > 0$$

Demak, $f(x,y)$ funksiya $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtada shartli minimumga erishadi. Bundan esa ushbu

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} \geq \frac{1}{3}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik tahlil. 2-qism. "Mumtoz so`z", Toshkent, 2018.
2. Т.Азларов., Ҳ.Мансуров. Математик анализ 2-қисм. "Ўқитувчи" , Тошкент 1989.
3. Тер-Крикоров А.М. , Шабунин.М.И. Курс математического анализа: Учеб.пособие для вузов. – 3 -е изд.,изправл. –М.:ФИЗМАТ-ЛИТ, 2001.
4. Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G. va b.q. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to`plami. 2-qism. "O`zbekiston" nashriyoti. Toshkent, 1993.
5. https://www.imo-official.org/
6. http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_LAGRANGE_METHOD.PDF