TATBIQIY AHAMIYATLI EKSTREMAL MASALARNI YECHISH METODLARI

Abdurahmonov Umidjon Shoqosim o'g'li
Qo'qon davlat pedagogika instituti o'qituvchisi

Annotatsiya: *Ushbu maqola tatbiqiy ahamiyatli ekstremal masalalarni yechish metodlariga bag'ishlanadi. Bu maqolada asosan to'rtta masala qo'yiladi va har bir masalani yechishning bir nechta usullari ko'rsatiladi. Maqolada ko'rilgan barcha masalalar yangi masalalardir. Bu maqola maktab o'quvchi va o'qituvchilari qo'llanma sifatida xizmat qiladi.*

Kalit so'zlar: *funkiya, hosila, differensial, tengsizlik, eng katta qiymat, eng kichik qiymat.*

Аннотация: *Данная статья посвящена методам решения экстремальных задач, имеющих практическое значение. Эта статья в основном ставит четыре проблемы и показывает несколько способов решения каждой из них. Все вопросы, обсуждаемые в статье, являются новыми вопросами. Данная статья служит пособием для школьников и учителей.*

Ключевые слова: *функция, производная, дифференциал, неравенство, наибольшее значение, наименьшее значение.*

Abstract: *This article is devoted to the methods of solving extreme problems of practical importance. This article mainly poses four problems and shows several ways to solve each problem. All issues discussed in the article are new issues. This article serves as a guide for schoolchildren and teachers.*

Key words: *function, derivative, differential, inequality, largest value, smallest value.*

Kirish. Ma'lumki, u yoki bu matematik metod o'z tabiatiga ko'ra real voqeliklarning bevosita o'ziga emas, balki uning ma'lum qonuniyatlar asosida tuzilgan matematik modeliga qo'llaniladi. Matematik model esa voqelikning barcha o'zgarishlarini o'zida mujassamlashtirgan u yoki bu ko'rinishdagi funksional munosabatdir.

Shuning uchun tadbiqiy ahamiyatli ekstremal masalalarni yechish tuzilgan asosiy funksiyaning ma'lum bir shartlardagi optimal qiymatlarini topishdan iborat.

Maktab matematika kursida tadbiqiy ahamiyatli ekstremal masalalar sistemasini tuzishda, bizningcha quyidagi talablarni e'tiborga olish muhimdir.

1.Tuzilgan (tanlanayotgan) masalalar hozirgi zamon ishlab chiqarishining axborotlariga asoslangan bo'lishi kerak.

2.Masalalar qandaydir matematik muammo asosiga qurilmay, balki bevosita ishlab chiqarish natijalariga mos kelishi kerak.

3.Masalaning yechimi maktab programmasida tashqariga chiqmasligi zarur.

Bundan buyon yozuvda ekstremal masala deganda tatbiqiy mohiyatli ekstremal masalalarni tushunishga shartlashamiz.

Quyida biz ekstremal masalalarni yechishning ba'zi asosiy metodlariga to'htalib o'tamiz.

Buyuk matematik Yakob Shteyner (1796-1863) o'z vaqtida ekstremal masalalarni yechishning ikki metodi haqida fikr yuritgan edi.

I. Differensial hisob yordamida hisoblash metodi.

II. Sintetik metod (xususiy usullar yordamida).

Har ikkala metodga alohida to‘htalib o‘tamiz.

I. Differensial hisob yordamida hisoblash metodi.

Masalaning qo‘yilishi. Ko‘pdan-ko‘p amaliy masalalar funksiyaning biror oraliqdagi eng katta yoki eng kichik qiymatini topishga keltiriladi. Bunday masalalarni yechish usullari darslikda ko‘rsatilgan bo‘lib, funksiyaning yopiq oraliqda eng katta va eng kichik qiymatini topishga asoslangandir.

Biroq ekstremal masalalarda tekshirilayotgan funksiya ko‘pincha ochiq, hatto cheksiz oraliqda bo‘lishi mumkin.

Shuning uchun funksiyalarni tekshirishning yana bir qoidasi bilan to‘ldirish maqsadga muvofiqdir. Quyida teorema sifatida keltirilgan qoida o‘quvchilarning o‘zlashtirishi uchun aytarli qiyinchilik tug‘dirmaydi.

1-teorema. Aytaylik F funksiya J oraliqda differensiyalanuvchi bo‘lib yagona x_0 kritik nuqtaga ega bo‘lsin. U holda F' hosila $x < x_0$ da manfiy, $x > x_0$ da musbat bo‘lsa, $x = x_0$ nuqtada F funksiya eng kichik qiymatga erishadi.

Bu teoremaning isbotini o‘quvchining o‘ziga havola etamiz. Shuni e’tiborga olish kerakki, bu teorema ihtiyoriy oraliq uchun o‘rinlidirBa’zi hollarda masalan, masala shartida xarflar ishtirok etganda kritik nuqtadan o‘tishdagi hosila ishorasini aniqlash bir muncha qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi. Bunday hollarda ikkinchi tartibli hosiladan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

2. Sintetik metod. Ekstremal masalalarni xususiy metodlardan foydalanib yechish.

1. Kvadrat funksiya va ularning ekstremumlari.

Aytaylik $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ funksiya berilgan bo‘lib, bu funksiya R da aniqlangan va uzluksiz bo‘ladi. $f(x)$ ni hosila qoidasidan foydalanmay tekshiraylik.

2-teorema. $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiya $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ da ekstremum qiymatga erishadi. Agar $a < 0$ bo‘lsa, bu qiymat eng katta, $a > 0$ bo‘lsa, bu qiymat eng kichik bo‘ladi.

Isbot: Berilgan funksiyadan to‘la kvadrat ajratamiz:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\right) + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Endi esa yuqoridagi har ikkala holda ham teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaymiz.

A) $a < 0$ bo‘lsa, birinchi qo‘shiluvchi $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ - manfiy bo‘lib, $x = -\dfrac{b}{2a}$ da eng katta qiymatga erishadi. Ikkinchi qo‘shiluvchi o‘zgarmas son bo‘lgani uchun bu holda kvadrat funksiya $c - \dfrac{b^2}{4a}$ ga teng va eng katta qiymatga erishadi.

B) $a>0$ bo‘lsa, birinchi qo‘shiluvchi $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ - musbat bo‘lib, $x=-\frac{b}{2a}$ da eng kichik qiymatga erishadi. Ikkinchi qo‘shiluvchi o‘zgarmas son bo‘lgani uchun kvadrat funksiya $x=-\frac{b}{2a}$ da $c-\frac{b^2}{4a}$ ga teng eng kichik qiymatga erishadi.

Bu teorema tekshirilayotgan masalaning matematik modeli kvadrat funksiya bo‘lgan hollarda, shubhasiz katta ahamiyatga ega bo‘ladi.

Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani ko‘raylik.

Masala. To‘g‘ri burchakli to‘rtburchak shaklidagi yer uchastkasi bir tomondan zavod devoriga yopishgan. Agar uchastka devorining umumiy uzunligi 200 metr bo‘lsa, uning yuzasi eng katta bo‘lishi uchun devorlarning o‘lchamlari qanday bo‘lishi kerak?

Yechish. Aytaylik, devorlardan birining uzunligi x bo‘lsin, u holda unga qo‘shni tomonning uzunligi $(200-2x)$ m. bo‘lib, uchastkaning yuzasi $S=x\cdot(200-2x)=-2x^2+200x$ bo‘ladi.

Shunday qilib, tekshirilayotgan masalaning matematik modeli $S=-2x^2+200x$ ko‘rinishdagi kvadrat funksiyani hosil qildik. Bu yerda $a=-2<0, b=200, c=0.$

U holda yuqoridagi teoremaning A) – holiga ko‘ra $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{200}{2\cdot(-2)}=50$

da yuza eng katta bo‘ladi. Ekstremumga tekshirish zarur bo‘lgan ba’zi masalalarni yechishda oldindan ma’lum bo‘lgan tengsizliklardan ham foydalaniladi. Navbatdagi metod sifatida ana shunday tengsizliklardan biri bilan tanishamiz.

2. Ekstremal masalalarni tengsizliklar yordamida yechish.

3-teorema. Aytalik, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ – nomanfiy sonlar bo‘lib, n natural son bo‘lsin. u holda

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1+x_2+\ldots\cdot x_n} \qquad (1)$$

tengsizlik o‘rinlidir, ya’ni berilgan sonlarning o‘rta arifmetigi, shu sonlarning o‘rta geometrik qiymatidan kichik emas. Bu yerda tenglik alomati faqat $x_1=x_2=\ldots=x_n$ bo‘lgandagina o‘rinlidir. Bu teorema matematik induksiya metodi yordamida isbotlanadi. Quyida biz ushbu teoremadan kelib chiqadigan ikkita muhim natijaga to‘htalamiz va ularning to‘liq isbotini keltiramiz.

1-natija. Yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan n ta manfiy bo‘lmagan sonlarning ko‘paytmasi shu ko‘paytuvchilar o‘zaro teng bo‘lgandagina eng katta qiymatga erishadi.

Isbot. Aytaylik, n ta manfiy bo‘lmagan qo‘shiluvchilar (o‘zgaruvchilar)ning yig‘indisi S bo‘lsin. (1) ga ko‘ra $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{p}$ va $x_1+x_2+\ldots+x_n\geq n\sqrt[n]{p}$ .Bu yerda tenglik faqat $x_K\ (k=1,2,\cdots,n)$ ko‘paytuvchilarning har biri $\sqrt[n]{p}$ ga teng bo‘lgandagina o‘rinli, boshqa hollarda esa, yig‘indi $n\sqrt[n]{p}$ o‘zgarmasdan katta bo‘ladi.

Demak, $n\sqrt[n]{p}$ qiymat $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ yig‘indining eng kichik qiymati bo‘lib, bu qiymatga har bir qo‘shiluvchi $\sqrt[n]{p}$ ga teng bo‘lgandagina erishadi.

Keltirilgan teorema va uning natijalari maktab matematika kursida katta ahamiyatga ega bo‘lsada, doimo qo‘llanilavermaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YHATI:

1. В.Қ.Қобулов. “Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси”. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1976.
2. F.B.Badalov, F.Shodmonov “Matematik modellar va muhandislik masalalarini sonli yechish usullari”. “Fan” nashriyoti.Toshkent 2000 yil.
3. Ю.Б.Боглаев. “Вычислителъная математика и программирование”.
4. Ҳикматов. “Экстремал масалалар”. Тошкент, 1989.
5. Набигин. “Экстремумы”. М.1966.
6. G‘.Nasriddinov, X.Shokirova. SH.Shoziyotov. “Stereometriya kursida ekstremal masalalar”.
7. Sh, A. U. (2022). The main approaches to the formation of the control action in younger schoolchildren in the process of teaching mathematics. *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429*, *11*(11), 142-150.
8. Isroilova, Gulnora, and Sh Abdurahimov. "The socio-political activity of the youth of Uzbekistan." International conference on multidisciplinary research and innovative technologies. Vol. 2. 2021.
9. Abdurakhmonovich, Shokosim Abdurahimov. "Informative-Target Analysis." Middle European Scientific Bulletin 22 (2022): 69-71.
10. Abdurakhmonovich, Shokosim Abdurahimov. "Technology of Critical Thinking in Russian Language and Literature Lessons in 5-6 Grades." Middle European Scientific Bulletin 22 (2022): 64-68.
11. Shoqosim o‘g‘li, A. U. (2022). The importance of didactic games in teaching mathematics in secondary schools. *Web of Scientist: International Scientific Research Journal*, *3*(6), 1566-1570.
12. Абдурахманов, У., Тошматова, О., & Мелиева, Х. (2022). Umumta’lim maktablarida matematika fanini o ‘qitishning zamonaviy didaktik vositalari va muammoli ta’lim texnologiyasi. *Общество и инновации*, *3*(3/S), 231-238.
13. Shoqosim o‘g‘li, A. U., Xafizaliyevna, M. X., & To‘lqinjon, G. O. (2022). MODERN DIDACTIC MEANS OF TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS AND PROBLEM EDUCATIONAL TECHNOLOGY. *Galaxy International Interdisciplinary Research Journal*, *10*(4), 460-467.
14. Эргашев, Акрахмхон Ахмадхожаевич, and Ш. А. Толибжонова. "Основные компоненты профессионального образования учителя математики." Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки 32.3 (2020): 180-196.