ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Абдухамидова Зилолахон Хурсановна
преподаватель математики,
Общеобразовательная школа № 57, г. Наманган

ВВЕДЕНИЕ

Теория специальных функций, как область математического анализа, посвященная исследованию и применению высших трансцендентных функций, имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и других разделов математики. Большие успехи в изучении теории гипергеометрической функции одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных. В этой работе применим свойства гипергеометрических функций к решению одной краевой задачи для телеграфного уравнения.

ЗАДАЧА ГУРСА

В области $\Delta=\{(\xi,\eta): a<\xi<\eta<b\}$ плоскости $\xi O\eta$ рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу со спектральным параметром

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(u_\eta-u_\xi\right)+\lambda^2 u=0, \tag{1}$$

где $\beta-$ действительное число, причем $0<2\beta<1$, а $\lambda-$действительное или чисто мнимое постоянное.

Задача Гурса. Найти регулярное в области Δ решение $u(\xi,\eta)\in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(a,\eta)=\varphi_a(\eta),\ \ a\le\eta\le b;\quad u(\xi,b)=\varphi_b(\xi),\ \ a\le\xi\le b, \tag{2}$$

где $\varphi_a(\eta)$, $\varphi_b(\xi)-$ заданные функции из класса $C[0,1]$, причем для этих функций выполняется условие согласования $\varphi_a(b)=\varphi_b(a)$.

Введем известные операторы [1,2]:

$$A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]\equiv f(x)-\int_a^x f(t)\left(\frac{b-t}{b-x}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-b)(x-t)}\right]dt,$$

$$B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]\equiv f(x)+\int_a^x f(t)\left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{1-n}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(b-t)(x-t)}\right]dt,$$

где $n-$неотрицательное целое число, а $J_\alpha(z)-$функция Бесселя первого рода порядка α. Здесь следует особо отметить, что $a\le b$.

При получении решения поставленной задачи будем пользоваться известным представлением решения задачи Коши-Гурса для уравнения (1). Регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее первому из условий (2) и

$$[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\xi-u_\eta\right)=\nu(\xi),\ \ a<\xi<b \tag{3}$$

имеет вид [1]

$$u(\xi,\eta)=k_3\int_a^\xi\frac{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta}\nu(t)dt+\int_a^\eta V(a,t;\xi,\eta)\Phi_a(t)dt,$$

(4)

где $\bar{J}_\alpha(x)-$ функция Бесселя-Клиффорда, а $V(s,t;\xi,\eta)$- функция Римана-Адамара уравнения (1); $\Phi_a(t)=\varphi_a'(t)+\beta\varphi_a(t)/(t-a)$.

Полагая в формуле (4) $\eta=b$ и учитывая первое из условий (3), получаем функциональное уравнение относительно $\nu(x)$ (здесь $x=\xi$). Последнее в результате ряда преобразований можно привести к виду:

$$k_3\Gamma(1-\beta)D_{ax}^{\beta-1}\left\{B_{abx}^{1,\lambda}\left[(b-x)^{-\beta}\nu(x)\right]\right\}+\int_a^b V(a,t,x,b)\Phi_a(t)dt=\varphi_b(x), \tag{5}$$

где $D_{ax}^\alpha[f(x)]-$ известный оператор дробного исчисления.

Применяя к обеим частям уравнения (5) последовательно операторы $D_{ax}^{1-\beta}$ и $A_{abx}^{1,\lambda}$, находим выражение для $\nu(x)$ и подставив которое в формулу (4), получим решение задачи (1)-(2) в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi\frac{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta(b-t)^{-\beta}}A_{abt}^{1,\lambda}\left\{D_{at}^{1-\beta}[\varphi_b(t)]\right\}dt-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi\frac{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta(b-t)^{-\beta}}A_{abt}^{1,\lambda}\left\{D_{at}^{1-\beta}\left[\int_a^b V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds\right]\right\}dt+$$

$$+\int_a^\eta V(a,t;\xi,\eta)\Phi_a(t)dt \tag{6}$$

Исследуем правую часть формулы (6). С этой целью сперва рассмотрим первое слагаемое. Используя определения операторов $D_{at}^{1-\beta}$ и $A_{abt}^{1,\lambda}$, меняя порядок интегрирования, затем выполняя замену $s=t+(\xi-t)z$ в полученном внутреннем интеграле и после нескольких преобразований попервое слагаемое правой части формулы (6) удаётся выразить через функцию Римана $R(a,b;\xi,\eta)$ уравнения (1) в виде

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi\frac{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]}{(\xi-t)^\beta(\eta-t)^\beta(b-t)^{-\beta}}A_{abt}^{1,\lambda}\left\{D_{at}^{1-\beta}[\varphi_b(t)]\right\}dt=$$

$$= R(a,b;\xi,\eta)\varphi_b(a) + \int_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}\varphi_b(t)\right].$$

Переходим к исследованию остальных слагаемых правой части формулы (6), сумму которых обозначим через Ω_2.

Рассмотрим интеграл $f(t) = \int_a^b V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds$ и для исследования этого интеграла введем обозначение

$$f_\varepsilon(t) = \int_a^{t-\varepsilon} V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds + \int_{t+\varepsilon}^{b} V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds,$$

где $\varepsilon > 0-$ достаточно малое число. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = f(t).$

В дальнейших исследованиях важную роль играет равенство

$$\int_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}f_\varepsilon(t)\right] = R(\xi,b;\xi,\eta)f_\varepsilon(\xi) -$$

$$-R(a,b;\xi,\eta)\int_{a+\varepsilon}^{\xi}R(a,s;a,b)\Phi_a(s)ds - \int_a^{\xi}(b-t)^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)\right\}f_\varepsilon(t)dt\,.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\Omega_2 = \int_b^{\eta}(t-a)^{-\beta}R(a,t;\xi,\eta)d\left[(t-a)^{\beta}\varphi_a(t)\right]$$

Таким образом, решение задачи Гурса для уравнения (1) принимает вид

$$u(\xi,\eta) = R(a,b;\xi,\eta)\varphi_a(b) + \int_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}\varphi_b(t)\right] +$$

$$+\int_b^{\eta}(t-a)^{-\beta}R(a,t;\xi,\eta)d\left[(t-a)^{\beta}\varphi_a(t)\right].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим, что в [1] применен метод Римана при решении задачи Гурса для общего уравнения гиперболического типа и решение получено в явном виде. Нам кажется интересным получить решение задачи Гурса для данного частного случая, не используя метода Римана. Применение метода Римана к вырождающимся гиперболическим уравнениям второго рода можно найти в [4,5].

ЛИТЕРАТУРА:

1.Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент, «Фан», 1997. 166 с.

2.Эргашев Т.Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // Вестник

Томского государственного университета. Математика и механика. 2017, №46. С.41-49.

3.Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., «Наука», 1981. 448 с.

4. Ergashev T.G., Komilova N.J. The Kampe de Feriet Series and the Regular Solution of the Cauchy Problem for Degenerating Hyperbolic Equation of the Second Kind. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, Vol. 43, №11. 3112–3124.

5. Bin-Saad M.G., Ergashev T.G., Ergasheva D.A., Hasanov A., Confluent Kampé de Fériet series arising in the solutions of Cauchy problem for degenerate hyperbolic equation of the second kind with the spectral parameter. Mathematica Pannonica *New Series, 29 (NS 3) (2023), iss.,2, p. 153-168.*