

БЕШИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЎЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМА

Икрамова Наргиза Саидакбаровна
Турсунова Эргашой Гайратжон кизи

Фаргона давлат университети, Мураббийлар кўчаси 19уй.

Аннотация. Ушбу мақолада икки ўзгарувчи функциянинг юқори тартибли тўла дифференциалидан фойдаланиб, бешинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламалар тадқиқ этилган.

Калит сўзлар. Бешинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама, бешинчи тартибли тўла дифференциалли функция, умумий ечим.

FIFTH ORDER TOTAL DIFFERENTIAL EQUATION

Annotation. In this paper, fifth order total differential equations are researched using the higher-order total differential of two-variable functions.

Key words. Fifth order total differential equation, fifth order total differential function, solution.

ПОЛНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В этой статье исследуются уравнения полного дифференциала пятого порядка с использованием полного дифференциала функций двух переменных более высокого порядка.

Ключевые слова. Уравнение полного дифференциала пятого порядка, функция полного дифференциала пятого порядка, решение.

КИРИШ

Биринчи тартибли тўла дифференциалли оддий дифференциал тенгламалар ҳақида кўплаб адабиётлардан маълумот олиш мумкин [1-2], [5-6]. Шунингдек, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва n-тартибли тўла дифференциалли тенгламалар [3-4-7] ишларда ўрганилган. Ушбу мақолада бешинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламаларни умумий ечимини тўла дифференциалли бўлиш шартларини кўлаб топиш ўрганилган.

Таъриф. Агар

$$M_{50}(x, y)dx^5 + 5M_{41}(x, y)dx^4dy + 10M_{32}dx^3dy^2 + 10M_{23}dx^2dy^3 + 5M_{14}(x, y)dx dy^4 + M_{05}(x, y)dy^5 = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламада $M_{50}(x, y)$, $M_{32}(x, y)$, $M_{23}(x, y)$, $M_{14}(x, y)$ ва $M_{05}(x, y)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлиб, булар учун

$$\frac{\partial M_{50}}{\partial y} = \frac{\partial M_{41}}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_{41}}{\partial y} = \frac{\partial M_{32}}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_{32}}{\partial y} = \frac{\partial M_{23}}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_{23}}{\partial y} = \frac{\partial M_{14}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial M_{14}}{\partial y} = \frac{\partial M_{05}}{\partial x}. \quad (2)$$

муносабат ўринли бўлса, (1) тенглама бешинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама дейилади, бунда $\frac{\partial M_{50}}{\partial y}, \frac{\partial M_{41}}{\partial x}, \frac{\partial M_{41}}{\partial y}, \frac{\partial M_{32}}{\partial x}, \frac{\partial M_{32}}{\partial y}, \frac{\partial M_{23}}{\partial x}, \frac{\partial M_{23}}{\partial y}, \frac{\partial M_{14}}{\partial x}, \frac{\partial M_{14}}{\partial y}, \frac{\partial M_{05}}{\partial x}$ функциялар бирор соҳада узлуксиз функциялар.

(1) тенгламанинг чап қисми бирор $u(x, y)$ функциянинг бешинчи тартибли тўлиқ дифференциали, яъни [1.31б]

$$d^5 u = M_{50}(x, y) dx^5 + 5M_{41}(x, y) dx^4 dy + 10M_{32} dx^3 dy^2 + 10M_{23} dx^2 dy^3 + 5M_{14} dx dy^4 + M_{05}(x, y) dy^5$$

бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^5} = M_{50}(x, y), \quad \frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^4 \partial y} = M_{41}(x, y), \quad \frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^3 \partial y^2} = M_{32}(x, y),$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^3} = M_{23}(x, y), \quad \frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x \partial y^4} = M_{14}(x, y), \quad \frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial y^5} = M_{05}(x, y). \quad (3)$$

эканлигидан, юқоридаги (2) шартлар келиб чиқишини тушуниш қийин эмас.

(3) тенгликларнинг учинчисидан $u(x, y)$ функцияни

$$u(x, y) = \iiint \iint M_{32}(x, y) dx^3 dy^2 = C_\gamma(y) + C_\lambda(x)$$

кўринишида бўлсин, бу ерда $C_\gamma(y), C_\lambda(x)$ - ихтиёрий ўзгармаслар ($\gamma, \lambda \in N$).

(3) тенгликларнинг биринчиси, иккинчиси, тўртинчиси, бешинчиси ва олтинчисидан

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^5} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\iint M_{32}(x, y) dy^2 \right] + y \cdot C_4^V(x) + C_5^V(x) = M_{50}(x, y), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^4 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int M_{32}(x, y) dy \right] + C_4^{IV}(x) = M_{41}(x, y), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M_{32}(x, y) dx \right] + C_1'(y) = M_{23}(x, y), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x \partial y^4} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\iint M_{32}(x, y) dx^2 \right] + x \cdot C_1''(y) + C_2''(y) = M_{14}(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial y^5} = \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left[\iiint M_{32}(x, y) dx^3 \right] + \frac{1}{2} x^2 \cdot C_1'''(y) + x \cdot C_2'''(y) +$$

$$+C_3'''(y) = M_{05}(x, y) \quad (8)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. (4), (5), (6), (7) ва (8) тенгликлардан $C_1(y)$, $C_2(y)$, $C_3(y)$, $C_4(x)$, $C_5(x)$ ларни топамиз. Топилган натижаларни $u(x, y)$ функцияга олиб бориб қўямиз ва умумий ечимга эга бўламиз.

Юқорида айтилганларни қуйида берилган мисол орқали кўриб чиқамиз.

Мисол. Ушбу

$$720xy^3 dx^5 + 5 \cdot 1080x^2 y^2 dx^4 dy + 10 \cdot 720x^3 y dx^3 dy^2 + 10 \cdot (180x^4 + 240y^3) dx^2 dy^3 + 5 \cdot 720xy^2 dx dy^4 + 720yx^2 dy^5 = 0$$

бешинчи тартибли тўла дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бу ерда $M_{50}(x, y) = 720xy^3$, $M_{41}(x, y) = 1080x^2 y^2$, $M_{32}(x, y) = 720x^3 y$, $M_{23}(x, y) = 180x^4 + 240y^3$, $M_{14}(x, y) = 720xy^2$, $M_{05}(x, y) = 720yx^2$.

Берилган тенгламани тўла дифференциаллик шартларини қаноатлантиришини текширамиз:

$$\frac{\partial M_{50}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [720xy^3] = 2160xy^2, \quad \frac{\partial M_{41}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [1080x^2 y^2] = 2160xy^2,$$

яъни
$$\frac{\partial M_{50}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{41}(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{41}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [1080x^2 y^2] = 2160x^2 y, \quad \frac{\partial M_{32}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [720x^3 y] = 2160x^2 y,$$

яъни
$$\frac{\partial M_{41}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{32}(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{32}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [720x^3 y] = 720x^3, \quad \frac{\partial M_{23}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [180x^4 + 240y^3] = 720x^3,$$

яъни
$$\frac{\partial M_{32}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{23}(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{23}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [180x^4 + 240y^3] = 720y^2, \quad \frac{\partial M_{14}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [720xy^2] = 720y^2,$$

яъни
$$\frac{\partial M_{23}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{14}(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{14}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [720xy^2] = 1440xy, \quad \frac{\partial M_{05}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [720yx^2] = 1440xy,$$

яъни
$$\frac{\partial M_{14}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{05}(x, y)}{\partial x}.$$

Демак, берилган тенглама бешинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама экан. Бу эса бизга берилган тенглама бирор $u(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлиши келиб чиқади. $u(x, y)$ функцияни тиклаш мақсадида $M_{32}(x, y)$ функциядан аввал y ни ўзгармас деб, x бўйича уч марта интеграллаб,

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \int M_{32}(x, y) dx = \int 720x^3 y dx = 180x^4 y + C_1(y),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) = \int 180x^4 y dx + \int C_1(y) dx + C_2(y) = 36x^5 y + x \cdot C_1(y) + C_2(y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, y) &= \int 36x^5 y dx + \int x \cdot C_1(y) dx + \int C_2(y) dx + C_3(y) = \\ &= 6x^6 y + \frac{1}{2} x^2 \cdot C_1(y) + x \cdot C_2(y) + C_3(y) \end{aligned}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Сўнгра бу тенгликдан x ни ўзгармас деб, y бўйича икки марта интеграллаб, $u(x, y)$ функцияни топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} u(x, y) &= \int 6x^6 y dy + \frac{1}{2} x^2 \int C_1(y) dy + x \int C_2(y) dy + C_3(y) dy + C_4(x) = \\ &= 3x^6 y^2 + \frac{1}{2} x^2 \int C_1(y) dy + x \int C_2(y) dy + \int C_3(y) dy + C_4(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} u(x, y) &= \int 3x^6 y^2 dy + \frac{1}{2} x^2 \iint C_1(y) dy^2 + x \iint C_2(y) dy^2 + \\ &+ \iint C_3(y) dy^2 + \int C_4(x) dy + C_5(x) = \\ &= x^6 y^3 + \frac{1}{2} x^2 \iint C_1(y) dy^2 + x \iint C_2(y) dy^2 + \iint C_3(y) dy^2 + y \cdot C_4(x) + C_5(x). \end{aligned}$$

Топилган $u(x, y)$ функциядан x бўйича беш марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{50}(x, y)$ функцияга, y бўйича беш марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{05}(x, y)$ функцияга, x бўйича тўрт марта y бўйича бир марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{41}(x, y)$ функцияга, x бўйича бир марта y бўйича тўрт марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{14}(x, y)$ функцияга, x бўйича икки марта y бўйича уч марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{23}(x, y)$ функцияга тенглаб, $C_1(y)$, $C_2(y)$, $C_3(y)$, $C_4(x)$ ва $C_5(x)$ ларни қуйидагича топамиз:

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^4 \partial y} = 1080x^2 y^2 + C_4^{IV}(x) = 1080x^2 y^2,$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^3} = 180x^4 + C_1'(y) = 180x^4 + 240y^3,$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial x \partial y^4} = x \cdot C_1''(y) + C_2''(y) = 720xy^2,$$

$$\frac{\partial^5 u(x, y)}{\partial y^5} = \frac{1}{2}x^2 \cdot C_1'''(y) + x \cdot C_2'''(y) + C_3'''(y) = 720x^2 y.$$

$$C_1(y) = 60y^4, C_2(y) = m_1 y + m_2, C_3(y) = \frac{1}{2}m_3 y^2 + m_4 y + m_5,$$

$$C_4(x) = \frac{1}{6}k_1 x^3 + \frac{1}{2}k_2 x^2 + k_3 x + k_4, C_5(x) = \frac{1}{24}k_5 x^4 + \frac{1}{6}k_6 x^3 + \frac{1}{2}k_7 x^2 + k_8 x + k_9.$$

$C_1(y), C_2(y), C_3(y), C_4(x)$ ва $C_5(x)$ ларни $u(x, y)$ функцияга олиб бориб кўйиб

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^6 y^3 + \frac{1}{2}x^2 \cdot \iint 60y^4 dy^2 + x \cdot \iint (m_1 y + m_2) dy^2 + \\ &+ \iint \left(\frac{1}{2}m_3 y^2 + m_4 y + m_5 \right) dy^2 + \\ &+ y \cdot \left[\frac{1}{6}k_1 x^3 + \frac{1}{2}k_2 x^2 + k_3 x + k_4 \right] + \frac{1}{24}k_5 x^4 + \frac{1}{6}k_6 x^3 + \frac{1}{2}k_7 x^2 + k_8 x + k_9 = \\ &= x^6 y^3 + x^2 y^6 + \frac{1}{6}m_1 xy^3 + \frac{1}{2}m_2 xy^2 + \frac{1}{24}m_3 y^4 + \frac{1}{6}m_4 y^3 + \frac{1}{2}m_5 y^2 + \\ &+ \frac{1}{6}k_1 x^3 y + \frac{1}{2}k_2 x^2 y + k_3 xy + k_4 y + \frac{1}{24}k_5 x^4 + \frac{1}{6}k_6 x^3 + \frac{1}{2}k_7 x^2 + k_8 x + k_9. \end{aligned}$$

функцияни ҳосил қиламиз. Демак, биз излаган функция:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^6 y^3 + \frac{1}{2}x^2 \cdot \iint 60y^4 dy^2 + x \cdot \iint (m_1 y + m_2) dy^2 + \iint \left(\frac{1}{2}m_3 y^2 + m_4 y + m_5 \right) dy^2 + \\ &+ y \cdot \left[\frac{1}{6}k_1 x^3 + \frac{1}{2}k_2 x^2 + k_3 x + k_4 \right] + \frac{1}{24}k_5 x^4 + \frac{1}{6}k_6 x^3 + \frac{1}{2}k_7 x^2 + k_8 x + k_9 = \\ &= x^6 y^3 + x^2 y^6 + \frac{1}{6}m_1 xy^3 + \frac{1}{2}m_2 xy^2 + \frac{1}{24}m_3 y^4 + \frac{1}{6}m_4 y^3 + \frac{1}{2}m_5 y^2 + \\ &+ \frac{1}{6}k_1 x^3 y + \frac{1}{2}k_2 x^2 y + k_3 xy + k_4 y + \frac{1}{24}k_5 x^4 + \frac{1}{6}k_6 x^3 + \frac{1}{2}k_7 x^2 + k_8 x + k_9 \end{aligned}$$

ФЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Салохитдинов М.С., Насритдинов Ғ.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. – Тошкент: Ўзбекистон, 1994.
2. Ergashev.T.G. Differensial tenglamalar fanidan misol va masalalar yechish. – Namangan, 2012.
3. Азизов М. ва Турсунова Э. Иккинчи ва учинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламалар ҳақида. “Ўзбекистонда илмий-амалий тадқиқотлар” мавзусидаги Республика 15-қўп тармоқли илмий масофавий онлайн конференциясининг 15-сони, 30 апрель, 2020 йил.
4. Азизов М. ва Турсунова Э. n-тартибли тўла дифференциалли тенгламалар ҳақида. “Ўзбекистонда илмий-амалий тадқиқотлар” мавзусидаги Республика 15-қўп тармоқли илмий масофавий онлайн конференциясининг 15-сони, 30 апрель, 2020 йил.
5. Ўринов А.Қ., Қосимов Х.Н., Ғозиев Қ.С. Дифференциал тенгламалар фанидан услубий кўрсатма. II қисм. -Фарғона: 2002.
6. О'rinov A.Q., Mirzakarimov E.M. Oddiy differensial tenglamalar Maple tizimida. – Toshkent: Navro'z, 2013.
7. Э.Ғ.Турсунова. Тўртинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламалар. JOURNAL OF INNOVATIONS IN SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL RESEARCH VOLUME6 ISSUE-6 (30 June) 2023, 240-244-betlar.