LYAPUNOV BO‘YICHA BERNULLI TENGLAMASI VA MUVOZANAT HOLATINING BARQARORLIGI TUSHUNCHASI

Asqarov Muhammadaziz Ahmadjon o'g'li
Farg'ona davlat universiteti magistranti

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Bernulli tenglamasining biologiyada Maltus qonuni bilan populyatsiyaga bog‘liqligi hamda barqarorlik nazariyasida logistik va Feyrxyulst tenglamalari haqida so‘z boradi.*

Kalit so‘zlar*: populyatsiya, muhit, o‘sish tezligi, hujayra, oqim, og‘ish, koeffitsiyent, logistik, barqarorlik.*

Abstract*: This article discusses the relationship between Bernoulli's equation and Malthus's law in biology, and the logistic and Fairhulst equations in stability theory.*

Key words*: population, environment, growth rate, cell, flux, deviation, coefficient, logistic, stability.*

Аннотация*: В статье рассматривается связь между уравнением Бернулли и законом Мальтуса в биологии, а также логистическими уравнениями и уравнениями Фэрхюльста в теории устойчивости.*

Ключевые слова*: популяция, среда, скорость роста, клетка, поток, отклонение, коэффициент, логистика, стабильность.*

$N = N(t)$ -$t \in [t_0, T]$ vaqtida cheklangan huddudagi Ω populyatsiyaning soni yoki zichligi bo‘lsin. Bu yerda T – taxminiy vaqt, masalan populyatsiyaning bir avlodining davomiyligi.

Ma‘lumki, N funksiya barcha butun sonlardan iborat to‘plam $R(N)$ ga tegishli. Butun sonlar to‘plamidan iborat bo‘lgan va uzilishga ega bo‘lgan N funksiyaning o‘rniga uzluksiz differensialanuvchi $u = u(t)$ funksiyani kirgizamiz, ikkala funksiyalarning butun qismlari teng bo’lgan vaqtning har bir momentida ya‘ni, $[u(t)] = N(t)$ hamma $t \in [t_0, T]$.

Agar faraz qilsak, populyatsiya Ω yashash muhitida bir xil taqsimlangan bo‘lsa, har bir tur populyatsiyada teng bo’lsa avlodlar bir-birini to‘ldiradi, taxmin qilishimiz mumkinki, populyatsiyaning o‘sish tezligi bir turga quyidagi farq bilan ustma-ust tushadi. $\varepsilon = r - s$, bu yerda r va s mos ravishda o’rtacha tug‘ilish va o‘rtacha o‘lim. Demak, $u(t)$ ning o‘zgarish dinamikasini birinchi tartibli differensial tenglama

$$u' = \varepsilon u \qquad (1)$$

sifatida ko‘rishimiz mumkin.

Umuman olganda, qo‘shimcha o‘sish koeffitsiyenti $\varepsilon = \varepsilon(t)$, ushbu populyatsiya soni ko‘payishini haqiqiy tezligi deyiladi, u va t ga haqiqiy bog‘langan.

Faraz qilaylik, populyatsiya o‘zgarmas muhitda yakka holatda yoki boshqa turlar bilan birgalikda bir-biriga ta’sir qilmasdan yashaydi, u yerda har bir tur uchun bir xil imkoniyatlar taqdim etilgan. Endi $\varepsilon = \mu = const$ bo‘lishi mumkin va (1) quyidagi yozish mumkin.

$$u(t)=u(\tau)\exp[\mu(t-\tau)], \qquad (2)$$

$\tau\in[t_0,T]$-ixtiyoriy belgilangan nuqta.

Yuklangan funksional tenglama (2) biologiyada va ayniqsa demografiyada Maltus qonuni yoki aholi sonining eksponensial o‘sishi qonuni sifatida tanilgan. μ raqami harakterli ko‘rsatkich deb ataladi.

Tirik jonzotlarning eksponensial o‘sishi (cho‘zilgan vaqt ichida) bo‘lishi mumkin emas, chunki har bir jonzot turi o‘z ko‘payishi natijasida o‘zining o‘sishini cheklaydi.

Populyatsiya ko‘payishi natijasida u yuqori chegaraga o‘lganlar va tug‘ilganlar soiga teng bo‘lganda yaqinlashadi.

Populyatsiyaning kattaligi muhitning sig‘imi deyiladi va K harfi bilan belgilanadi. Bu yerda: populyatsiya o‘sishining tezligi 0 ga teng. Ko‘rinib turibdiki, muhitning sig‘imi bor resurslar bilan ifodalanadi a u populyatsiyani maksimal soni bilan ustma-ust tushadi. Agar har qanday real resurslarni cheklanganini hisobga olsak, u holda o‘sish sonini tezligi tushishi kerak. Bu holat quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\varepsilon=\mu-\left(\frac{\mu}{K}\right)u(t),\ \ t_0\le t\le T. \qquad (3)$$

Bu yerda va keying holatda $u(t)$ soni yoki populyatsiyaning zichligi deb belgilanadi, ya‘ni birlik fazoga jonzot turning soni.

U holda (1) tenglama (3)tenglamaga nisbatan quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u'=\mu u-\left(\frac{\mu}{K}\right)u^2 \qquad (4)$$

Bu Ferxyulst-Pirla tenglamasi yoki logistik tenglama deyiladi, va populyatsiya nazariyasida keng tarqalgan.

t_m nuqtani $[t_0,T]$ oraliqda belgilaymiz, bu yerda $u(t)$ funksiya o‘zining musbat maksimumiga erishadi.

$$u(t_m)=\max_{[t_0,T]}u(t).$$

Agar $t_m\in[t_0,T]$ u holda $u'(t_m)=0$ va muhit sig‘imining ta‘rifiga ko‘ra

. $$K=u(t_m) \qquad (5)$$

(4) va (5) dan yuklangan chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamani olamiz.

$$u'(t)=\mu u(t)-[\mu/u(t_m)]u^2(t) \qquad (6)$$

O‘sish jarayoni (4) yoki (6) bilan belgilangan tenglama logistik o‘sish deyiladi.

Faraz qilaylik, populyatsiyani o‘sish tezligi bitta jonzot turiga hisoblaganda quyidagi formula bilan hisoblanadi.

$$\varepsilon=p(t)-q(t)u(t) \qquad (7)$$

(7) faraz qilaylik, ε va $u(t)$ orasidagi chiziqli bog‘lanishni ifodalaydi. Ya‘ni $u(t)$ va - biologik populyatsiya orasidagi oddiy funksional bog‘lanish.

(1) tenglama (7) tenglamaga solishtirganda quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u' = p(t)u - q(t)u^2 \qquad (8)$$

$q(t)$ ichki turlar orasidagi raqobatning koeffitsiyenti deb ataladi.

(8) tenglama Bernulli tenglamasining xususiy holiligi ko'rinib turibdi:

$$a(t)u' + b(t)u = c'(t)u^{\alpha} signu \qquad (9)$$

Bu yerda α - nolga va birga teng bo'lmagan haqiqiy son.

(9) ko'rinishidagi tenglamaga populyatsion biologiyaning ko'p masalalari keltiriladi. Xususan, agar populyatsiyani fluktuatsiya sonini $u = u(t)$ hisobga olsak, va taxmin qilsak, fluktuatsiyani o'rta amplitudasi $\sqrt{u}$ ga to'g'ri proporsionalligi uchun, u holda maltus qonuni quyidagi ko'rinishga ega :

$$u' = \mu u - c(t)\sqrt{u};\ c(t) \ge 0\ . \qquad (10)$$

Yana bir misolni ko'rib chiqamiz.

Bu oqim kultivatori modeli, bunda bakterial hujayralarining ko'payishi va o'lishi bundan tashqari, tashqaridan hujayralarning kelish oqimining tezligi $f(t)$ bo'lsin.

Hujayralarning o'lish tezligi ularning konsentratsiyasi $u(t)$ ga to'g'ri proporsional, ko'payish tezligi esa $u^{\alpha}(t)$ kattaligiga to'g'ri proporsional bo'lsin. Ikki jinsli kulturada juda kichik hujayralar konsentratsiyasoda ko'payish tezligi har xil jinsdagi 2 ta uchrashish ehtimoliga proporsional. Shuning uchun α =2. U holda tirik hujayralar konsentratsiyasining dinamikasi differensial tenglama ko'rinishga ega:

$$u' = f(t) - b(t)u - c(t)u^{\alpha} \quad u = u(t). \qquad (11)$$

Bu yerda $b(t)$ va $c(t)$ hujayralarning mos ravishda ko'payish va o'lish koeffitsiyentlari.

(11) tenglama α=2 bo'lganda Rikkati tenglamaga, $f(x) \equiv 0$ Bernulli tenglamasiga o'tadi.

Agar Rikkati tenglamasi

$$u' = f(t) - b(t)u - c(t)u^2$$

hech bo'lmaganda bitta yechim $v = v(t)$ bo'lsa, $u = v + z$ almashtirish orqali ko'rishimiz mumkin. Bu yerda z -yangi topilishi kerak bo'lgan funksiya, va u Bernulli tenglamasiga keltiriladi.

$$z' = \left[2c(t)v + b(t)\right]z - c(t)z^2 \qquad (12)$$

(8) yoki (12) tenglamalar matematik biologiyada Ferxyulst tenglamasi deyiladi, differensial tenglamalarda esa Bernulli tenglamasi deyiladi.

Shuning uchun quyidagi tenglama o'rinli:

$$u' = p(t)u - q(t)u^{\alpha},\ u = u(t) \ge 0 \qquad (13)$$

Bu yerda: $p(t) \ge 0, q(t) \ge 0,\ \alpha \ne 0, \alpha \ne 1, \alpha \in R$

va | (13) Bernulli-Ferxyulst tenglamasi deyiladi.

Agar K muhitning sig'imi berilgan kattalik bo'lsa, Ferxyulst-Pirla masalasi quyidagi ko'rinishdagi tenglamalar sinfiga kiradi:

$$u' = f(u),\ t_0 \le t \le T \le \infty \qquad (14)$$

Bu yerda: $f(u)$-manfiy bo‘lmagan $u \in [0, u_m]$ nuqtaning unimodal funksiyasi $f(0) = f(u_m) = 0$.

Bu yerda $[0, u_m]$ segmentda uzluksiz funksiya unimodal deyiladi, agar uning yagona bo‘lgan maksimum nuqtasi u^* va ixtiyoriy x_1 va x_2 ular uchun $0 \le x_1 \le x_2 \le u_m$, quyidagi tengsizlik $f(x_1) < f(x_2)$, $x_2 < u*$ bo‘lganda va $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik, $x_1 \ge u*$.

Agar $f(u) \in c'[0, u_m]$, unimodal funksiya bo‘lsa, u holda u^* $f'(u) = 0$ ning yechimi deb ta’riflanadi. (4) tenglama holatida $u_m = K$, $u^* = \frac{K}{2}$.

Ma’lumki, o‘zgarmas holatini tashkillashtirish ochiq biologik sistemaning muhim alomatlaridan biridir.

Populyatsiyaning holati biologik sistema sifatida vaqtning har bir onida yagona kattalik – ularning soni yoki biomassa $u = u(t)$ orqali belgilansin, bu yerda (14) tenglamaga qanoatlantiriladi. Unda o‘ng tomoni $f(u) \in c^2[0, u_m]$ ga kiradi va u_m vaqtga bog‘liq emas. $f(u_m) = 0$ ligi uchun, u_m - (14) tenglamaning o‘zgarmas yechimi bo‘ladi. $u = u_m$ tenglik holati Lyapunov bo‘yicha barqaror bo‘ladi, agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ ucuhun shunday $\delta > 0$ son borki, quyidagi

$$|u(t) - u_m| < \varepsilon, \ \forall t \in [t_0, \infty],$$

o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $|u(t_0) - u_m| < \delta$, Lyapunov bo‘yicha barqarorlik masalasi tenglik holatini quyidagicha hal qilinadi.

Sistema u_m balans nuqtasidan og‘ib qo‘shni nuqtaga

$$u = u_m + v \qquad (15)$$

teng bo‘lsin. Bu yerda barqarorlik holatining shunday kichik og‘ishiki, nisbat 1 dan ancha kichik (15) tenglamani (14) tenglamaga qo‘yib quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$v' = F(v), \ F(v) = f(v + u_m) \qquad (16)$$

$F(0) = f(u_m) = 0,$ $F'(0) = f'(u_m)$ va $F(v) \in c^2[-u_m; 0]$ bo‘lganligi uchun, quyidagiga osonlik bilan ega bo‘lamiz:

$$F(v) = f'(u_m) \cdot v + \int_0^v (v - \xi) F''(\xi) d\xi$$

Integrallarning o‘rta qiymatida haqidagi umumiy teoremani qo‘llaymiz, agar $\varphi(x)$ funksiya - $a < x < b$ intervalda uzluksiz va chegaralangan haqiqiy funksiya, $\psi(x)$ funksiya esa uzluksiz, chegaralangan va oraliqda musbat bo‘lsa, unda shunday son borki, $y \in [a, b]$

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \varphi(y) \int_a^b \psi(x) dx \qquad (17)$$

Shu teorema tufayli,shunday manfiy kattalik $v_0 > v$ borki, quyidagi

$$\int_0^v (v-\xi)F''(\xi)d\xi = F''(v_0)\int_0^v (v-\xi)d\xi = \frac{1}{2}F''(v_0)v^2$$

Shuning uchun, (16) tenglamani Ferxyulst-Pirla tenglamasi sifatida ko‘rishimiz mumkin:

$$v' = f'(u_m)v + \frac{1}{2}f''(v_0 - u_m)v^2, \ v < v_0 < 0 \qquad (18)$$

Agar (18) tenglamada kichik kattalikni eng katta tartib sifatida chiziqli bo‘lmagan hadini tashlab yuborsak, u holda Maltus tenglamasiga ega bo‘lamiz.

$$v' = f'(u_m)v, \qquad (19)$$

Ushbu tenglama Lyapunovning barqarorlik nazariyasida chiziqli tenglama yoki birinchi yaqinlashish tenglamasi deyiladi.

(19) tenglamaning har qanday yechimi (2) tenglama bilan mos ravishda quyidagi ko‘rinishga ega:

$$v(t) = v(\tau)\exp\left[f'(u_m)(t-\tau)\right]. \qquad (20)$$

Osonlikcha ko‘rsatish mumkinki, $f'(u_m) \le 0.$

Agar $f'(u_m) = 0$ bo‘lsa, (19) tenglamada barqarorlik masalasi ochiq qoladi.

$f'(u_m) < 0$ bo‘lsin. U holda, (20) tenglamada $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0,$ demak, v birinchi og‘ishiga vaqt o‘tishi bilan o‘chadi. Bundan kelib chiqadiki, (14) tenglamada $u = u_m$ o‘zgarmas yechimi Lyapunov bo‘yicha barqarordir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. M.A.Nahushev – Uravnenie matematicheskoy bilogii – Moskva, „Visshaya shkola”1995

2. S.Grossman, J.Terner – Matematika dlya biologov - „Visshaya shkola” 1983

3. J.G.M.Tyornli – matematicheskie moduli v fiziologii rasteniy – Kiev. Naukova dumka, 1982.